I – Mots qui commutent

On fixe un alphabet Σ. Tous les mots considérés sont des éléments de Σ^*.

1. Soient u et v deux mots non vides. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :
   a) $uv = vu$
   b) Il existe un mot w et des entiers $k, p \in \mathbb{N}$ tels que $u = w^k$ et $v = w^p$.
   c) Il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $u^m = v^n$.

Soit $u \in \Sigma^+$. On appelle *commutant* de u le langage $C(u) = \{v \in \Sigma^* \mid uv = vu\}$.

2. Montrer que $C(u)$ est un *sous-monoïde* de $(\Sigma^*, \cdot)$, c'est-à-dire qu'il contient ε et est stable par concaténation.
3. Montrer qu'il existe un unique mot non vide r tel que $C(u) = r^*$.

II – Mots de Fibonacci

Les mots de Fibonacci sur l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ sont définis par

$$f_0 = a,\ f_1 = b,\ f_{n+2} = f_{n+1} f_n \quad \text{pour} \quad n \geq 0.$$

1. Montrer que pour $n \geq 2$, le suffixe de taille 2 de f_n est ba si n est pair, ab si n est impair.
2. Pour $n \geq 2$, on note g_n le préfixe de f_n obtenu en supprimant ses deux dernières lettres. Montrer que g_n est un palindrome, c'est-à-dire que $g_n = \widetilde{g_n}$, où $\widetilde{g_n}$ est le mot obtenu en inversant ses lettres.

III – Règles sur les expressions régulières

Pour chacune des propositions suivantes sur des expressions régulières quelconques, donner une preuve ou un contre-exemple. Le symbole $\equiv$ signifie que les expressions décrivent le même langage.

1. $(e^2)^* \equiv (e^*)^2 \quad (\text{où } e^2 = ee)$.
2. $(e_1 \mid e_2)^* \equiv e_1^* \mid e_2^*$.
3. $(e_1 e_2)^* \equiv e_1^* e_2^*$.
4. $(e_1 \mid e_2)^* \equiv (e_1^* e_2^*)^*$.

IV – Exemples de langages réguliers

1. Donner une expression régulière dont le langage est l'ensemble des mots sur $\{a, b, c\}$ contenant exactement un a et un b (et un nombre quelconque de c).
2. Donner une expression régulière dont le langage est l'ensemble des mots sur $\{a, b, c\}$ ne contenant pas de a consécutifs (aa ne doit pas apparaître).
3. Donner une expression régulière dont le langage est l'ensemble des mots sur $\{a, b, c\}$ contenant exactement deux a et tels que tout c est immédiatement précédé d'un b.

Si $x \in \mathbb{R}$, on note $L(x)$ l'ensemble des préfixes de la suite des chiffres de x après la virgule. On utilise le développement décimal qui ne se termine pas par une infinité de 9. Par exemple,

$$L(\pi) = \{\varepsilon, 1, 14, 141, 1415, ...\}.$$

4. En sachant que $\frac{1}{6} = 0.1666...$ et $\frac{1}{7} = 0.142857142857...$, montrer que $L\left(\frac{1}{6}\right)$ et $L\left(\frac{1}{7}\right)$ sont réguliers.
5. Montrer plus généralement que $L(x)$ est régulier si $x \in \mathbb{Q}$ (on montrera plus tard que c'est en fait une équivalence).
6. Donner une expression régulière dont le langage est $\{a^n b^p \mid n, p \in \mathbb{N}, n \equiv p (\mathrm{mod}\, 2)\}$.

V – Distance de Hamming

On fixe un alphabet fini Σ. Si $u = u_1 ... u_n$ et $v = v_1 ... v_n$ sont deux mots de même taille, leur distance de Hamming est

$$d(u, v) = |\{i \in \{1, ..., n\} \mid u_i \neq v_i\}|.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la distance de Hamming est une distance sur Σ^n.

Étant donné un langage L sur Σ, on définit son voisinage de Hamming par

$$\mathcal{H}(L) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in L, |u| = |v| \ \text{ et } \ d(u, v) \leq 1\}.$$

2. Sur l'alphabet $\{0, 1\}$, donner une expression régulière pour $\mathcal{H}(\mathcal{L}(0^*1^*))$.
3. Montrer que si L est un langage régulier, alors $\mathcal{H}(L)$ est régulier.
4. Sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$, écrire une fonction `f : int regexp -> int regexp` renvoyant une expression régulière du voisinage de Hamming d'un langage, en utilisant le type suivant. Les lettres de l'expression d'entrée valent 0 ou 1.

```OCaml
type 'a regexp =
  | Vide | Epsilon | L of 'a (* L a est la lettre a *)
  | Union of 'a regexp * 'a regexp
  | Concat of 'a regexp * 'a regexp
  | Etoile of 'a regexp
```

VI – Clôture par sur-mot

ENS MP oral

On fixe un alphabet fini non vide Σ. Étant donnés deux mots $w, w' \in \Sigma^*$, on dit que w' est un sur-mot de w, noté $w \preccurlyeq w'$, s'il existe une fonction strictement croissante φ de $\{1, ..., |w|\}$ dans $\{1, ..., |w'|\}$ telle que $w_i = w'_{\varphi(i)}$ pour tout $1 \leq i \leq |w|$. Étant donné un langage L, on note $\overline{L}$ le langage des sur-mots de mots de L :

$$\overline{L} = \{w' \in \Sigma^* \mid \exists w \in L, w \preccurlyeq w'\}.$$

1. On pose $L_0 = \mathcal{L}(ab^*a)$ et $L_1 = \mathcal{L}((ab)^*)$, sur un alphabet contenant a et b. Donner une expression régulière pour $\overline{L_0}$ et $\overline{L_1}$.
2. Montrer que, pour tout langage L, on a $\overline{\overline{L}} = \overline{L}$.
3. Existe-t-il des langages L' pour lesquels il n'existe aucun langage L tel que $\overline{L} = L'$?
4. Montrer que, pour tout langage régulier L, le langage $\overline{L}$ est régulier.
5. On admet pour cette question le résultat suivant : pour toute suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de mots de Σ^*, il existe $i < j$ tels que $w_i \preccurlyeq w_j$.

   Montrer que, pour tout langage L, non nécessairement régulier, il existe un langage fini $F \subseteq L$ tel que $\overline{F} = \overline{L}$.
6. Un langage L est clos par sur-mots si, pour tout $u \in L$ et tout $v \in \Sigma^*$ tel que $u \preccurlyeq v$, on a $v \in L$. Déduire de la question précédente que tout langage clos par sur-mots est régulier.
7. On admet que les langages réguliers sont stables par complémentaire. Un langage L est clos par sous-mots si, pour tout $u \in L$ et tout $v \in \Sigma^*$ tel que $v \preccurlyeq u$, on a $v \in L$. Montrer que tout langage clos par sous-mots est régulier.
8. Démontrer le résultat admis à la question 5.